Příklady k samostatnému řešení
4. část – vektorová analýza

1. Vypočítejte $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, když $\boldsymbol{r} = \sqrt{3}(\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$.

2. Určete křivkový integrál $\int \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ v mezích $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, když $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{r} = (\sin^2 t)\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2t)\boldsymbol{j} + \left(t^2 - \dfrac{\pi}{2}t\right)\boldsymbol{k}$.

3. Určete křivkový integrál $\int \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ v mezích $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, když

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

a

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{2}(\cos t)\boldsymbol{i} + (\cos 2t)\boldsymbol{j} + \left(\frac{2t}{\pi}\right)\boldsymbol{k}\ .$$

4. Spočítejte práci A, kterou vykoná síla $\boldsymbol{F} = (x + y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ po dráze $\boldsymbol{r} = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin^2 t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$ mezi body $P_1(t = 0)$ a $P_2\left(t = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Těleso o hmotnosti m se pohybuje v tíhovém poli Země po dráze

$$\boldsymbol{r} = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + \left(\frac{2}{2\pi}\right)t\boldsymbol{k}$$

od výšky 0 do výšky h (tj. $0 \le t \le 2\pi$). Osa z souřadného systému $O(x, y, z)$, ve kterém je určen vektor $\boldsymbol{r}$, je svislá. Jaká práce se vykoná při tomto pohybu?

6. Určete integrál $\int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ mezi body $P_1[0, 0]$ a $P_2[1, 1]$, když $\boldsymbol{F} = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j}$. Dráha $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ je

   a) přímka $y = x$,

   b) parabola $y = x^2$,

   c) úsečky P_1A a AP_2 pro $A[1, 0]$.

7. Dokažte, že platí

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}^0}{r^3}\ .$$

8. Dokažte, že platí

$$\operatorname{grad} r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{r}^0 \ .$$

9. Hustota kapaliny je ϱ, tíhové zrychlení je g a hloubka pod hladinou kapaliny je h. Určete vektor gradientu tlaku $\operatorname{grad} p$.

10. Vypočítejte $\operatorname{div} \boldsymbol{r}$, když $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

11. Určete jednotky veličiny $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$, pokud $\boldsymbol{A}$ je

    a) rychlost pohybu,

    b) polohový vektor,

    c) síla.

12. Ověřte přímým výpočtem v kartézských souřadnicích, že

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{b} \ .$$

13. Vektorové pole $\boldsymbol{F}$ je dáno

$$\boldsymbol{F} = 2xz\boldsymbol{i} + 2yz^2\boldsymbol{j} + (x^2 + 2y^2 z - 1)\boldsymbol{k} \ .$$

Spočítejte $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$. Lze nalézt funkci $\varphi = \varphi(x, y, z)$ takovou, že lze vektorové pole zapsat ve tvaru $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \varphi$?