Příklady k samostatnému řešení
2. část – funkce dvou a více proměnných

1. Určete definiční obory funkcí:

   a) $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sqrt{4 - x^2 - y^2}$,

   b) $f(x,y) = \arcsin(1-x) \arccos(1+y)$,

   c) $f(x,y) = x^{\ln y}$.

2. Vyšetřete graf funkce $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

3. Vyšetřete grafy funkcí: a) $f(x,y) = -|x|$, b) $g(x,y) = -|y|$, c) $f(x,y) = \max(-|x|, -|y|)$.

4. Vypočítejte parciální derivace (prvního řádu) daných funkcí v bodě $\boldsymbol{a}$:

   a) $f(x,y) = x/y + y/x$, $\boldsymbol{a} = (1,1)$,

   b) $f(x,y) = \arctan(x/y)$, $\boldsymbol{a} = (0,1)$,

   c) $f(z,t) = \sqrt{2z^3 - 3t^3}$, $\boldsymbol{a} = (3,2)$,

   d) $f(x,y,z) = x^{y \ln z}$, $\boldsymbol{a} = (\mathrm{e}, 3, \mathrm{e}^2)$.

5. Dokažte, že ze stavové rovnice ideálního plynu $pV = nRT$ vyplývá:

$$\frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = -1 .$$

6. Vypočítejte parciální derivace druhého řádu daných funkcí:

   a) $u = xyz$,

   b) $z = xy + y/x$.

7. Rozhodněte, zda existuje a vypočítejte totální diferenciál funkcí:

   a) $f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2$ v bodě $(-1,1)$,

   b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ v bodě $(1,2,3)$,

   c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ v bodě $(0,0,0)$.

8. Užitím diferenciálu přibližně vypočítejte $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$ (Návod: Definujte $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ a počítejte $f(1 + 0{,}02, 2 - 0{,}03)$.)

9. Určete přibližně změnu objemu rotačního válce při deformaci, změní-li se poloměr jeho základny z 2 na 2,05 dm a výška z 10 na 9,8 dm.

10. Dokažte Maxwellův vztah
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V ,$$
s uvážením, že $\mathrm{d}F \equiv \mathrm{d}(U - TS) = -S\,\mathrm{d}T - P\,\mathrm{d}V$.

11. Ukažte, že operátor $\left(x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ má ve sférické soustavě souřadné (r, ϑ, φ) tvar $\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$.

12. Vypočítejte derivace y', y'' v bodě A, je-li funkce $y(x)$ určena implicitně rovnicí $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$ a bodem $A = (1, 1)$.

13. Najděte lokální extrémy následujících funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 - xy + 6y + 1$.

14. Vypočtěte dvojné integrály:

    a) $\displaystyle\iint_M (2x + y - 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je množina ohraničená přímkami $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$

    b) $\displaystyle\iint_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 \leq 2x \wedge x \leq 2\}$,

    c) $\displaystyle\iint_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$,

    (Návod: V úloze c) je výhodné přejít do polárních souřadnic s použitím substituční metody.)

15. Vypočtěte trojné integrály:

    a) $\displaystyle\iiint_M (x^2y - z + 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \langle 0, 3\rangle \times \langle -2, 1\rangle \times \langle 1, 2\rangle$,

    b) $\displaystyle\iiint_M xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

16. Homogenní rotační kužel má poloměr podstavy a a výšku h. Určete vzdálenost jeho hmotného středu od podstavy.

17. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního rotačního kužele o poloměru podstavy r, výšce h a hmotnosti m vzhledem k jeho rotační ose.