

Příklady k samostatnému řešení
1. část – nevlátní integrály, integrál racionální funkce, komplexní čísla

Spočítejte nevlátní integrály:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

4. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

5. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

Najděte primitivní funkci:

7. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx$

8. $\int \frac{x^3}{x-2} dx$

9. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$

10. $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

11. $\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x + 1)^2(x^2 + 1)} dx$

Poznámka: v příkladu 11 uvažte, že mnohočlen ve jmenovateli má dva komplexně sdružené kořeny.

12. Dokažte, že součin komplexních čísel je asociativní, tj. pro každá tři komplexní čísla z_1, z_2, z_3 platí $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$. (Návod: napište každé komplexní číslo ve tvaru $z = x + iy$ a roznásobte.)

13. Jsou dána komplexní čísla $z_1 = 2 + 4i$ a $z_2 = 1 - 2i$. Vypočítejte součet $z_1 + z_2$, součin $z_1 z_2$ a podíl z_1 / z_2 , komplexně sdružená čísla z_1^*, z_2^* , zapište čísla v exponenciálním tvaru $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ a $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ a zakreslete čísla z_1, z_2 i všechny předchozí výsledky v Gaussově rovině.

14. Nalezněte všechny (komplexní) kořeny rovnice

$$z^3 = 1 .$$

15. Pomocí Moivreova vzorce najděte vztah pro $\cos 4\varphi$ a $\sin 4\varphi$.