

## Příklady k samostatnému řešení

### 3. část – derivace

22. Vypočítejte podle definice derivace  $\left(\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$  derivaci funkce  $f(x) = \sqrt{x}$  v bodě  $x = 9$ .
23. Spočítejte derivaci funkce  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ .
24. Spočítejte derivaci funkce  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .
25. Spočítejte derivaci funkce  $y = \sqrt{1-x^2}$ .
26. Spočítejte derivaci funkce  $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  ( $a \in \mathbb{R}$  je konstanta).
27. Spočítejte derivaci funkce  $y = \sin x + \cos x$ .
28. Spočítejte derivaci funkce  $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ .
29. Spočítejte derivaci funkce  $y = 2 \sin(3x + 5)$ .
30. Spočítejte derivaci funkce  $y = \sin(\sin x)$ .
31. Spočítejte derivaci funkce  $y = x \arcsin x$ .
32. Spočítejte derivaci funkce  $y = \operatorname{arctg} x^2$ .
33. Spočítejte derivaci funkce  $y = \ln^2 x$ .
34. Spočítejte derivaci funkce  $y = \frac{1}{\ln x}$ .
35. Spočítejte derivaci funkce  $y = \ln \frac{1 - e^x}{e^x}$ .
36. Spočítejte derivaci funkce  $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{cotg} x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}$ .

37. Určete diferenciál funkce  $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ .
38. Délka hrany krychle je  $x = 5 \text{ m} \pm 0,01 \text{ m}$ . Určete absolutní a relativní chybu při výpočtu objemu krychle.
39. S jakou přesností je třeba změřit poloměr koule, abychom se při výpočtu objemu dopustili chyby nepřesahující 1 %?
40. Vyšetřete průběh funkce  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$  a načrtněte její graf.
41. Vyšetřete průběh funkce  $y = x e^{1/x}$  a načrtněte její graf.
42. Do koule o poloměru  $r$  máme vepsat kruhový válec s největším objemem. Určete jeho rozměry.
43. Vypočítejte pomocí l'Hospitalova pravidla limitu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$ .
44. Vypočítejte pomocí l'Hospitalova pravidla limitu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ .
45. Vypočítejte pomocí l'Hospitalova pravidla limitu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$ .
46. Nahradte podle Maclaurinova rozvoje funkci  $f(x) = \sin x$  polynomem sedmého stupně. Odhadněte maximální chybu, které se dopustíme při výpočtu  $\sin 0,02$  pomocí polynomu třetího stupně. Vypočítejte tuto hodnotu.
47. Nahradte podle Maclaurinova rozvoje funkci  $f(x) = \ln(1+x)$  polynomem pátého stupně. Spočítejte pak přibližně hodnotu  $\ln 1,2$ .
48. Pohyb hmotného bodu v prostoru v závislosti na čase  $t$  je dán polohovým vektorem

$$\mathbf{r} = 3 \sin t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} - t^2 \mathbf{k}.$$

Určete vektory rychlosti a zrychlení.